فعالیت

۱ــ با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید :

نقاط A و B چه عددی را نمایش می‌دهد؟

فاصلهٔ نقطه A از O یا طول پاره‌خط OA چقدر است؟

فاصلهٔ نقطه B از O یا طول پاره‌خط OB چقدر است؟

می‌خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر ۲ باشد.

۲ــ نقطه C را روی محور نمایش دهید به‌طوری که طول OC برابر ۲ باشد؛ چند نقطه می‌توان یافت؟

فاصلهٔ نقطهٔ نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می‌نامیم و با علامت $|a|$ (بخوانید قدر مطلق a) نمایش می‌دهیم؛ بنابراین در مثال بالا می‌توان نوشت : $|-۲| = |۲| = ۲$

مثال : فاصلهٔ نقاط نظیر دو عدد $\frac{۲}{۳}$ و $-\frac{۲}{۳}$ تا مبدأ برابر $\frac{۲}{۳}$ است؛ پس قدر مطلق هر دو عدد $\frac{۲}{۳}$ و $(-\frac{۲}{۳})$ برابر $\frac{۲}{۳}$ است؛ یعنی : $|\frac{۲}{۳}| = |-\frac{۲}{۳}| = \frac{۲}{۳}$

مثال : قدر مطلق $-\sqrt{۵}$ را به‌صورت $|-\sqrt{۵}|$ نشان می‌دهیم که مساوی $\sqrt{۵}$ است. قدرمطلق ۰/۰۴ را به‌صورت $|۰/۰۴|$ نشان می‌دهیم که مساوی ۰/۰۴ است.

قدر مطلق صفر، مساوی صفر و قدر مطلق عددهای مثبت برابر خود آن عدد است. قدر مطلق هر عدد منفی، قرینهٔ آن است. اگر a یک عدد حقیقی باشد :

$a = ۰ \Rightarrow |a| = ۰$

$a > ۰ \Rightarrow |a| = a$

$a < ۰ \Rightarrow |a| = -a$

مثال : به محاسبات زیر توجه کنید :

$|۱۰ - ۲۰ + ۵| = |-۵| = ۵$

$|(-۶) \times (+۱۰)| = |-۶۰| = ۶۰$

کار در کلاس

۱ــ جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید :

الف) دو عدد a و b مثبت است. — ۱) $a > ۰, b < ۰$

ب) عدد a نامنفی است. — ۲) $a > ۰, b > ۰$

ج) دو عدد a و b منفی است. — ۳) $a \geq ۰$

د) عدد a مثبت و عدد b منفی است. — ۴) $a < ۰, b < ۰$

هـ) عدد a نامثبت است. — ۵) $a \leq ۰$

۲ــ هر عبارت سمت راست، نتیجهٔ منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به‌هم وصل کنید :

۱) $ab < ۰$ — الف) $a > ۰, b > ۰$

۲) $ab > ۰, a + b > ۰$ — ب) $a < ۰, b < ۰$

۳) $ab > ۰ , a + b < ۰$ — ج) $a < ۰, b > ۰$

۳ــ هر عبارت سمت راست، نتیجهٔ منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به‌هم وصل کنید :

۱) $|a| = -a$ — الف) $a \geq ۰$

۲) $|a| = a$ — ب) $a > ۰, b > ۰$

۳) $|a + b| = a + b$ — ج) $a < ۰$

۴) $|a + b| = -(a + b)$ — د) $a < ۰, b < ۰$

۴ــ عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید :

۱) قدر مطلقِ حاصل‌ضربِ دو عدد، مساوی با حاصل‌ضرب قدر مطلقِ آنهاست.

۲) قدر مطلقِ مجموع دو عدد، از مجموع قدرمطلق‌های آن دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی با آن است.

فعالیت

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار نوشته شده است :

$\sqrt{۲} \simeq ۱/۴ \quad \sqrt{۳} \simeq ۱/۷ \quad \sqrt{۵} \simeq ۲/۲ \quad \sqrt{۶} \simeq ۲/۴ \quad \sqrt{۷} \simeq ۲/۶ \quad \sqrt{۸} \simeq ۲/۸$

با توجه به مقادیر تقریبی صفحهٔ قبل، تساوی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح دهید :

$$|۱-\sqrt{۲}|=-(۱-\sqrt{۲})=-۱+\sqrt{۲}=\sqrt{۲}-۱$$

دلیل : $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$ پس $\sqrt{۲}-۱$ عددی منفی می‌شود :

۱) $|۲-\sqrt{۳}|=$ دلیل :

۲) $|\sqrt{۷}-\sqrt{۸}|=$ دلیل :

۳) $|۲\sqrt{۵}-\sqrt{۵}|$ دلیل :

۴) $|-۴-\sqrt{۳}|=$ دلیل :

مثال : اگر $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=\sqrt{۲}$ و $c=-۳$ باشد، حاصل عبارت $|a+b+c|$ را به‌دست می‌آوریم :

$$|a+b+c|=|\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}+(-۳)|=|-۲/۵+\sqrt{۲}|$$

چون $-۲/۵+\sqrt{۲}$ عددی منفی است ($\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$)، پس حاصل عبارت مساوی با $-(-۲/۵+\sqrt{۲})$ یعنی $۲/۵-\sqrt{۲}$ است.

مثال :

$$|\underbrace{۳-\sqrt{۵}}_{\text{مثبت}}|+|\underbrace{-۲-\sqrt{۵}}_{\text{منفی}}|=(۳-\sqrt{۵})-(-۲-\sqrt{۵})$$

$$=۳-\sqrt{۵}+۲+\sqrt{۵}=۵$$

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید :

$\sqrt{a^۲}$	$\sqrt{(-۳)^۲}$	$\sqrt{۳^۲}$	$\sqrt{۶^۲}$	$\sqrt{(-۶)^۲}$	$\sqrt{(-۷)^۲}$	$\sqrt{(-۱۲۷)^۲}$	$\sqrt{۳۲۵^۲}$
حاصل	۳						

از فعالیت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

با توجه به فعالیت بالا و مفهوم قدرمطلق، می‌توانیم بنویسیم : $\sqrt{a^۲}=|a|$

مثال : برای محاسبهٔ $\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^۲}$ خواهیم داشت :

$$\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^۲}=|\underbrace{۱-\sqrt{۳}}_{\text{منفی}}|=-(۱-\sqrt{۳})=-۱+\sqrt{۳}$$

کار در کلاس

۱ــ عبارت‌های زیر را با هم مقایسه کنید :

الف) $|(-۷)^۲|$ ○ $|-۷|^۲$

ب) $|-۸+۵|$ ○ $|-۸|+|۵|$

ج) $|۳-۹|$ ○ $|۳|-|۹|$

۲ــ عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید :

$|۰/۲^۵ - ۰/۲^۶| =$ $\quad$ $|۷^۳ - ۷^۴| =$ $\quad$ $|-\frac{۴}{۳}| =$ $\quad$ $|۰| =$

۳ــ حاصل عبارات زیر رابه‌دست آورید :

الف) $\sqrt{(-۲۵۹۵)^۲} =$ $\quad$ ب) $\sqrt{(۱۳۹۴)^۲} =$

ج) $\sqrt{(-۳+\sqrt{۱۰})^۲} =$ $\quad$ د) $\sqrt{(۲-\sqrt{۵})^۲} =$

تمرین

۱ــ اگر $a=۰/۲۵$, $b=-\frac{۱}{۴}$, $c=۲\frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید :

$|a+b| + ۲|a-b-c|$

۲ــ عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید :

الف) $|-۳\sqrt{۵}|$ $\quad$ ب) $|۷-۵\sqrt{۳}|$ $\quad$ ج) $|۰+\sqrt{۵}|$

۳ــ جای خالی را با عدد مناسب پر، و جواب‌هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید :

$|۵-۱۲| > ۱ + \square$

۴ــ مقدار عددی عبارت $|a|+a$ را به ازای $a=-۲$ ، $a=۰$ و $a=۲$ به‌دست آورید. آیا می‌توانید عددی حقیقی به‌جای a قرار دهید که حاصل $|a|+a$ منفی باشد؟

۵ــ با ارائهٔ یک مثال، نادرست بودن تساوی $\sqrt{a^۲} = a$ را نشان دهید.

۶ــ حاصل عبارات روبه‌رو را به‌دست آورید : $\sqrt{(۱-\sqrt{۱۰})^۲}$ $\quad$ $\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}$

فصل ۳

استدلال و اثبات در هندسه

اُدعُ اِلیٰ سَبیلِ رَبِّکَ بِالحِکمَةِ وَ المَوعِظَةِ الحَسَنَةِ وَ جادِلهُم بِالَّتی هِیَ اَحسَنُ ...

با حکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به نیکوترین روش استدلال و مناظره کن! (سورهٔ نحل، آیهٔ ۱۲۵)

بارش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می‌آورد و در عین حال نماد زیبایی زمستان است. اما شاید جالب باشد بدانید که این دانه‌های زیبای متقارن که اغلب شش شاخه هستند، علی‌رغم آنکه میلیاردها دانه‌اند، امّا هر کدام شکل منحصر به خود را دارند و به نظر می‌رسد هیچ دو تایی از آنها «هم‌نهشت» نیستند!